PART2　命題と証明

2 (1)　整数 n について，n^2 が 3 の倍数ならば，n は 3 の倍数であることを証明せよ。

(2)　$\sqrt{3}$ が無理数であることを証明せよ。ただし，(1)の結果を用いてもよいものとする。

Point Pickup

(1)　命題 $p \Longrightarrow q$ とその対偶 $\overline{q} \Longrightarrow \overline{p}$ の真偽は一致する。

これを利用し，対偶が真であることを示すことで，もとの命題が真であることを証明することができる。

(2)　命題の証明において，その命題が成り立たないと仮定し，矛盾を導くことによって，もとの命題が正しいことを証明する方法を「背理法」という。

第２講　PART2　確認問題

1　x，y は実数とする。次の命題を証明せよ。

「$x+y$ は無理数である」$\Longrightarrow$「x または y は無理数である」

（証明）

この命題の対偶は　「［ア］」$\Longrightarrow$「［イ］」……（＊）

［ウ］であるから，（＊）は成り立つ。

よって，［エ］である。

［［ア］，［イ］の選択肢］

① x または y は無理数である

② x と y はともに無理数である

③ x または y は有理数である

④ x と y はともに有理数である

⑤ $x+y$ は無理数である

⑥ $x+y$ は有理数である

［［ウ］の選択肢］

① 有理数と有理数の和は有理数

② 有理数と無理数の和は無理数

③ 有理数と無理数の和は有理数

④ 無理数と無理数の和は無理数

［［エ］の選択肢］

① もとの命題が真であるから，対偶も真

② もとの命題が真であるから，対偶は偽

③ 対偶が真であるから，もとの命題も真

④ 対偶が偽であるから，もとの命題は真

2 x, y は実数とする。背理法により，次の命題を証明せよ。

「x は有理数，y は無理数である」

$\Longrightarrow$「$x+y$ は無理数である」

（証明）

$x+y$ が無理数でない，すなわち，

「$x+y$ は **オ** である」

と仮定する。

p を **オ** として $x+y=p$ とすると　$y=p-x$　……(＊＊)

$p-x$ は **カ** であるから，(＊＊)は **キ** であることに矛盾する。

したがって，

「x は有理数，y は無理数である」

$\Longrightarrow$「$x+y$ は無理数である」

は成り立つ。

[**オ** , **カ** の選択肢]

① 整数　　② 自然数

③ 有理数　　④ 無理数

[**キ** の選択肢]

① x が有理数　　② y が無理数

③ $x+y$ が無理数

[MEMO]

PART2　命題と証明

2 (1)　整数 n について，n^2 が 3 の倍数ならば，n は 3 の倍数であることを証明せよ。
(2)　$\sqrt{3}$ が無理数であることを証明せよ。ただし，(1)の結果を用いてもよいものとする。

(1)　与えられた命題の対偶は

「整数 n について，n が 3 の倍数でないならば，n^2 は 3 の倍数ではない」

である。

n が 3 の倍数でないとき，k を整数として

$n=3k+1$　または　$n=3k+2$

とおける。

$n=3k+1$ のとき

$$n^2=(3k+1)^2=9k^2+6k+1=3(3k^2+2k)+1$$

$n=3k+2$ のとき

$$n^2=(3k+2)^2=9k^2+12k+4=3(3k^2+4k+1)+1$$

$3k^2+2k$，$3k^2+4k+1$ は整数であるから，$n=3k+1$，$n=3k+2$ いずれの場合も n^2 は 3 の倍数ではない。

よって，対偶が真であるから，もとの命題も真である。

(2)　$\sqrt{3}$ が無理数でない，すなわち有理数であると仮定すると

$\sqrt{3}=\dfrac{n}{m}$ (m，n は 1 以外に公約数をもたない自然数)

とおける。このとき，$\sqrt{3}\,m=n$ より $3m^2=n^2$　…… ①

$3m^2$ は 3 の倍数であるから，n^2 も 3 の倍数である。

よって，(1)の結果から，n は 3 の倍数であるから，$n=3k$ (k：自然数) とおける。

このとき①より　$3m^2=(3k)^2$ であるから　$m^2=3k^2$

$3k^2$ は 3 の倍数であるから，m^2 は 3 の倍数であり，m は 3 の倍数である。

ゆえに，m と n は公約数 3 をもち，1 以外に公約数をもたないことに矛盾する。

したがって，$\sqrt{3}$ は無理数である。

第 2 講　PART2　確認問題 解答

1 **[正解]** ア：④，イ：⑥，ウ：①，エ：③

[解説]

「$x+y$ は無理数である」

$\Longrightarrow$「x または y は無理数である」

この命題の対偶は

「x と y はともに有理数である」

$\Longrightarrow$「$x+y$ は有理数である」……(＊) [A]

有理数と有理数の和は有理数であるから，(＊)は成り立つ。

よって，**対偶が真であるから，もとの命題も真**である。

[A]　命題 $p \Longrightarrow q$ とその対偶 $\overline{q} \Longrightarrow \overline{p}$ の真偽は一致する。
これを利用し，対偶が真であることを示すことで，もとの命題が真であることを証明することができる。

2 **[正解]** オ：③，カ：③，キ：②

[解説]

x は有理数，y は無理数のとき，

$x+y$ が無理数でない，すなわち，

「$x+y$ は**有理数**である」　……(A)

と仮定する。 [B]

p を有理数として $x+y=p$ とすると

$y=p-x$　……(＊＊)

$p-x$ は**有理数**であるから，(＊＊)は **y が無理数**であることに矛盾する。

ゆえに，(A)の仮定は誤りであるから，$x+y$ は無理数である。

したがって，

「x は有理数，y は無理数である」

$\Longrightarrow$「$x+y$ は無理数である」

は成り立つ。

[B]　背理法
命題の証明において，その命題が成り立たないと仮定し，矛盾を導くことによって，もとの命題が正しいことを証明する方法を背理法という。